Soient $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction *continue*, $s = (s_1, s_2, \ldots, s_j, \ldots)$ une suite de nombres réels vérifiant $0 \leqslant s_j \leqslant 1$ pour tout $j \geqslant 1$. On désigne par $\mu_n(f,s)$ le nombre réel

$$\mu_n(f,s) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f(s_j)$$

et par $\mu(f,s)$, lorsqu'elle est définie, la limite

$$\mu(f,s) = \lim_{n\to\infty} \mu_n(f,s) .$$

I

1° Déterminer $\mu(f,s)$ dans les différents cas suivants :

a. La fonction f est constante;

b. La suite s est convergente et a pour limite l;

c. La suite s est la suite définie par

$$s_j = \begin{cases} 2^{-j} & \text{si} \quad j \text{ est impair;} \\ 1-2^{-j} & \text{si} \quad j \text{ est pair.} \end{cases}$$

d. La suite s est la suite définie par

$$s_j = \begin{cases} \dfrac{1}{j} & \text{si} \quad j = 3k \quad (k \in \mathbf{N},\ k \geqslant 1), \\ 1 - \dfrac{1}{j} & \text{sinon ;} \end{cases}$$

e. La suite s est la suite définie par $s_1 = 1$,

$$s_{2^k+p} = \frac{2p-1}{2^{k+1}} \qquad (k \in \mathbf{N},\ 1 \leqslant p \leqslant 2^k),$$

μ existe-t-elle ?

2° On rappelle qu'une suite $(f_j)_{j\geqslant 1}$ de fonctions $f_j : [0,1] \to \mathbf{R}$ satisfait au *critère de Cauchy uniforme* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $j \geqslant N$ et $k \geqslant N$ entraîne la relation $\sup_{t\in[0,1]} |f_j(t) - f_k(t)| < \varepsilon$.

a. Montrer que si $(f_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite de fonctions continues $f_j : [0,1] \to \mathbf{R}$ vérifiant le critère de Cauchy uniforme et si $\mu(f_j, s)$ est défini pour tout j, alors $(\mu(f_j,s))_{j\geqslant 1}$ est une suite de Cauchy de nombres réels.

b. En déduire que si $(f_j)_{j\geqslant 1}$ est une suite de fonctions continues $f_j : [0,1] \to \mathbf{R}$ qui tend uniformément vers une fonction f et si $\mu(f_j, s)$ est défini pour tout j, alors $\mu(f,s)$ est définie et

$$\mu(f,s) = \lim_{j\to\infty} \mu(f_j, s) .$$

II

Soient I un intervalle contenu dans $[0,1]$, $s = (s_j)_{j\geqslant 1}$ une suite de nombres réels $s_j \in [0,1]$; on désigne par $N_k(I,s)$ le cardinal de l'ensemble $\{j\ ;\ 1 \leqslant j \leqslant k,\ s_j \in I\}$. Soit $p_k(I,s) = \frac{1}{k} N_k(I,s)$ et soit $p(I,s)$, lorsqu'elle existe, la limite

$$p(I,s) = \lim_{k\to\infty} p_k(I,s) .$$

1° Si I et J sont des intervalles *disjoints* contenus dans $[0,1]$, montrer que l'on a

$$p(I \cup J, s) = p(I,s) + p(J,s),$$

pourvu que $p(I,s)$ et $p(J,s)$ soient définis.

2° Déterminer $p(I,s)$ lorsque I est un intervalle contenu dans $[0,1]$ et s l'une des suites définies en I, 1°, *b*, *c*, *d*.

3° On suppose désormais la suite s telle que $p(I,s)$ soit défini pour tout intervalle I. Si I est l'intervalle fermé (resp. ouvert, semi-ouvert) $[\alpha,\beta]$ (resp. $]\alpha,\beta[$, $[\alpha,\beta[$, $]\alpha,\beta]$), on désigne par $l(I)$ le nombre $l(I) = \beta - \alpha$. Montrer que si pour tout intervalle I, on a $p(I,s) = l(I)$, alors $\mu(f,s)$ est définie pour toute fonction continue f et $\mu(f,s) = \int_0^1 f(t)\,dt$.

4° Montrer que si une suite s est telle que pour toute fonction continue f, $\mu(f,s)$ est défini et égal à $\int_0^1 f(t)\,dt$, alors $p(I,s)$ est défini et égal à $l(I)$ pour tout intervalle $I \subset [0,1]$.

On dira que la suite $s = (s_j)$ est *régulière* si elle vérifie

$$p(I,s) = l(I)$$

pour tout intervalle $I \subset [0,1]$.

5° Soit $s = (s_j)$ une suite régulière ; déterminer

a. $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}(s_1^n + s_2^n + \ldots + s_k^n)$ $\qquad (n \in \mathbf{N})$;

b. $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}(\cos 2n\pi s_1 + \cos 2n\pi s_2 + \ldots + \cos 2n\pi s_k)$,

$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}(\sin 2n\pi s_1 + \sin 2n\pi s_2 + \ldots + \sin 2n\pi s_k)$

$\qquad (n \in \mathbf{N},\ n \geqslant 1)$.

III

1° Soit $p_n(x,t) = \dfrac{1}{n}\dfrac{\sin^2 n\pi(x-t)}{\sin^2 \pi(x-t)}$ $(n \geqslant 1)$. Indiquer comment on peut prolonger p_n en une fonction continue au point $x = t$.

Montrer qu'il existe des constantes réelles $a_{n,k}$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ et $b_{n,k}$ $(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ telles que

$$p_n(x,t) = a_{n,0} + \sum_{k=1}^{n-1} a_{n,k} \cos 2k\pi(x-t) + \sum_{k=1}^{n-1} b_{n,k} \sin 2k\pi(x-t).$$

Calculer l'intégrale $\int_0^1 p_n(x,t)\,dt$. Montrer que, si $0 < \varepsilon \leqslant x \leqslant 1-\varepsilon$, on a l'inégalité

$$\int_0^{x-\varepsilon} p_n(x,t)\,dt + \int_{x+\varepsilon}^1 p_n(x,t)\,dt \leqslant \frac{1}{n\sin^2 \pi\varepsilon}.$$

2° Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$. Soit f_n $(n \geqslant 1)$ la fonction définie par

$$f_n(x) = \int_0^1 f(t)\, p_n(x,t)\,dt \qquad (x \in [0,1]).$$

Montrer qu'il existe des constantes réelles

$$\alpha_{n,k}\ (0 \leqslant k \leqslant n-1) \quad \text{et} \quad \beta_{n,k}\ (1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

telles que

$$f_n(x) = \alpha_{n,0} + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k} \cos 2k\pi x + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{n,k} \sin 2k\pi x.$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n \geqslant 1}$ converge vers f, uniformément sur $[0,1]$.

3° Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = f(1)$ et soient f_n les fonctions définies par

$$f_n(x) = \int_0^1 f(t)\, p_n(x,t)\,dt.$$

Soit $s = (s_j)_{j \geqslant 1}$ une suite de réels $s_j \in [0,1]$ telle que, pour tout $n \geqslant 1$, on ait

$$(A)\quad \begin{cases} \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k}(\cos 2n\pi s_1 + \cos 2n\pi s_2 + \ldots + \cos 2n\pi s_k) = 0, \\ \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{k}(\sin 2n\pi s_1 + \sin 2n\pi s_2 + \ldots + \sin 2n\pi s_k) = 0. \end{cases}$$

Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, on a $\mu(f_n, s) = \int_0^1 f_n(t)\,dt$.

En déduire que $\mu(f, s) = \int_0^1 f(t)\,dt$.

4° Soit $s = (s_j)$ une suite vérifiant les conditions (A) de la question précédente. Soit $I = [\alpha, \beta]$, $0 < \alpha \leqslant \beta < 1$. Soit (φ_k) la suite de fonctions définies, pour k entier suffisamment grand, par

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \alpha - \dfrac{1}{k} \text{ ou } \beta + \dfrac{1}{k} \leqslant t \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } \alpha \leqslant t \leqslant \beta, \\ kt - k\alpha + 1 & \text{si } \alpha - \dfrac{1}{k} \leqslant t \leqslant \alpha, \\ k\beta - kt + 1 & \text{si } \beta \leqslant t \leqslant \beta + \dfrac{1}{k}, \end{cases}$$

et (ψ_k) la suite de fonctions définies, pour k entier suffisamment grand, par

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \alpha \text{ ou } \beta \leqslant t \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } \alpha + \dfrac{1}{k} \leqslant t \leqslant \beta - \dfrac{1}{k}, \\ kt - k\alpha & \text{si } \alpha \leqslant t \leqslant \alpha + \dfrac{1}{k}, \\ k\beta - kt & \text{si } \beta - \dfrac{1}{k} \leqslant t \leqslant \beta. \end{cases}$$

Montrer les inégalités $\mu_n(\psi_k, s) \leqslant p_n(I, s) \leqslant \mu_n(\varphi_k, s)$. En déduire que $p(I, s)$ est défini et égal à $l(I)$. Montrer que si la suite (s_j) vérifie les conditions (A), elle est régulière.

5° Soit $\theta \in [0,1]$ un nombre *irrationnel*. Montrer que, si n est un entier non nul,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} \exp(2i\pi j n\theta) = 0.$$

En déduire que la suite $(s_j)_{j \geqslant 1}$, où $s_j = j\theta - E(j\theta)$, est régulière ($E(t)$ désignant la partie entière d'un nombre réel t).

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail